Terminale ES	**Mathématiques** **Suites – Fonctions - Probabilités**	***1h50***

La calculatrice est autorisée.
La feuille annexe est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : 4 points

On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_5 = 120$ et $u_{10} = 3{,}75$.

1) Démontrer que la raison de cette suite est $q = 0{,}5$

2) Calculer u_0 et u_{15}. Arrondir les valeurs à 10^{-4}.

3) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{15}$. Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Exercice 2 : 7 points

Partie A : On considère la fonction f définie sur [-1 ; 1] par : $f(x) = x^3 + 6x + 3$

1) Calculer $f'(x)$.

2) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

3) **a)** Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

Partie B : On considère la fonction g définie sur [-1 ; 1] par $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^3-3}$.

1) Calculer $g'(x)$. et vérifier que $g'(x) = -2x\dfrac{f(x)}{\left(2x^3-3\right)^2}$.

2) En admettant que $g'(x) = -2x\dfrac{f(x)}{\left(2x^3-3\right)^2}$, étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction g.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = -0{,}68$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 dans l'intervalle [-1 ; 1].

<u>Exercice 3 :</u> **3 points**

Un trader promet qu'il connaît un placement qui rapporte 0,2 % par jour !
(c'est à dire que le montant du placement augmente de 0,2 % chaque jour)

Une personne décide de lui faire confiance et place un capital de 500 euros.
On appellera C*n* le montant du placement le *n*-ième jour. On note ainsi $C_1 = 500$.

1) Quel montant peut espérer avoir la personne le 30ème jour ? Arrondir au centime.

2) **a)** Compléter l'algorithme donnée sur la feuille annexe afin qu'il affiche en sortie le nombre de jours nécessaires pour obtenir un capital supérieur à 1 500 euros.

b) Quel est le résultat ?

<u>Exercice 4 :</u> **6 points**

Dans une urne, il y a 10 jetons : 3 verts ; 5 rouges et 2 blancs.

Partie A :

Dans une kermesse le jeu consiste à tirer 2 jetons dans cette urne : On tire un jeton, on note sa couleur, on le remet dans l'urne puis on retire un second jeton dont on note la couleur.
La mise initiale est de 2 euros. L'organisateur donne 5 euros si on obtient deux jetons de même couleur.

1) Justifier que la probabilité *p* de tirer 2 jetons de même couleur est égale à 0,38.

2) Un joueur décide de jouer 10 fois à ce jeu, on note X le nombre de victoires.
- **a)** Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
- **b)** A partie de quatre parties gagnées, le gain (4 fois 5 €) devient supérieur ou égal à la mise initiale (10 parties à 2 €). On s'intéresse donc à la probabilité de gagner au moins quatre parties parmi les dix jouées. Déterminer $P(X \geq 4)$.

Partie B :

On a observé que si un joueur gagne, la probabilité qu'il joue une fois suivante est de 0,9. Dans le cas contraire, si un joueur perd, la probabilité qu'il joue une fois suivante est seulement de 0,4.
On note les évènements :

G1 : Le joueur gagne à la première partie.
G2 : Le joueur gagne à la deuxième partie.
J : Le joueur rejoue une fois suivante.

1) Compléter l'arbre sur la feuille annexe.
2) Montrer par un calcul que P(G2) = 0,2242.
3) Sachant qu'un joueur a gagné à sa deuxième tentative, quelle est la probabilité qu'il ait gagné à la tentative précédente ?

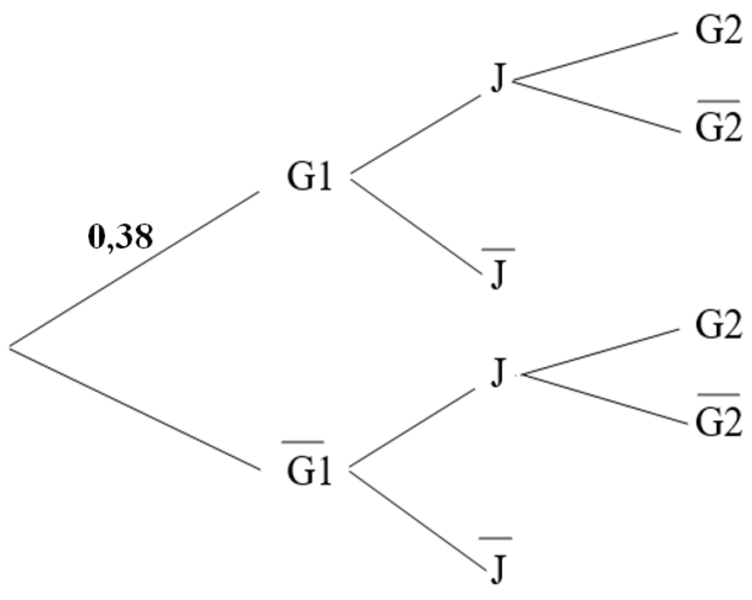
Feuille annexe à rendre avec la copie

NOM :...

Exercice 3 : Question 2) a)

Affecter à C la valeur 500
Affecter à N la valeur 1
Tant que C ....
    Affecter à N la valeur N + 1
    Affecter à C la valeur ....
    Fin Tant que
Afficher ....

Exercice 4 : Partie B / Question 1)



Eléments de solutions

Ex1 : 1) $\dfrac{u_{10}}{u_5} = \dfrac{u_0 \times q^{10}}{u_0 \times q^5} = q^5$ d'où $\dfrac{3,75}{120} = 0,03125 = q^5$

On peut vérifier que $0,5^5 = 0,03125$ donc q = 0,5.

2) $u_5 = 120 = u_0 \times 0,5^5$ donc $u_0 = \dfrac{120}{0,03125} = 3840$ et $u_{15} = 3840 \times 0,5^{15} \approx 0,1172$

3) $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{16}}{1-q} = 3840 \times \dfrac{1-0,5^{16}}{1-0,5} \approx 7679,88$

Ex 2 :

Partie A : On considère la fonction f définie sur [-1 ; 1] par : $f(x) = x^3 + 6x + 3$

1) $f'(x) = 3x^2 + 6$.

2) Un carré est toujours positif, donc $f'(x) > 0$ sur [-1 ; 1].

3) **a)** La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur [-1 ; 1]

Elle est strictement croissante sur [-1 ; 1]. $f(-1) = -4$ et $f(1) = 10$
$0 \in [f(-1) ; f(1)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

b) Avec la calculatrice on trouve $\alpha \approx 0,4814$

Partie B : On considère la fonction g définie sur [-1 ; 1] par $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^3-3}$.

$$g'(x) = \frac{2x(2x^3-3) - 6x^2(x^2+2)}{(2x^3-3)^2} = 2x \times \frac{2x^3 - 3 - 3x^3 - 6x}{(2x^3-3)^2} = 2x \times \frac{-x^3 - 6x - 3}{(2x^3-3)^2} = -2x \times \frac{f(x)}{(2x^3-3)^2}$$

x	-1		α		0		1
$-2x$		+		+	0	–	
$f(x)$		–	0	+		+	
$g'(x)$		–	0	+	0	–	
$g(x)$	g(-1)	↘	g(α)	↗	g(0)	↘	g(1)

g(-1) = -0.6 $\quad$ g(α) ≈ –0.69 $\quad$ g(0) ≈ –0.67 $\quad$ g(1) = –3

$\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \approx 1,69 > 1$ donc la fonction g est définie et continue sur [-1 ; 1] , elle est monotone sur les intervalles [-1 ; α] , [α ; 0] et [0 ; 1], d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe 3 solutions distinctes x_1, x_2 et x_3 dans chacun de ces intervalles.

($x_1 \approx$ -0.6697 , $x_2 \approx$ -0,2449 et $x_3 \approx$ 0,1793)

Ex 3 : Un trader promet qu'il connaît un placement qui rapporte 0,2 % par jour !
On appellera C*n* le montant du placement le *n*-ième jour. $C_1 = 500$.

1) $C_{30} = 500 \times 1{,}002^{29} \approx 529{,}83$ euros.

2) **a)**

```
Affecter à C la valeur 500
Affecter à N la valeur 1
Tant que C < 1500
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à C la valeur C x 1,002
Fin Tant que
Afficher N
```

```
Affecter à C la valeur 500
Affecter à N la valeur 1
Tant que C < 1500
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à C la valeur 500 x 1,002^(N – 1)
        Fin Tant que
        Afficher N
```

b) Le résultat est 551. (550 jours après le premier jour d'achat)

Ex 4 :

Dans une urne, il y a 10 jetons : 3 verts ; 5 rouges et 2 blancs.

Partie A :

Dans une kermesse le jeu consiste à tirer 2 jetons dans cette urne : On tire un jeton, on note sa couleur, on le remet dans l'urne puis on retire un second jeton dont on note la couleur.
La mise initiale est de 2 euros. On gagne 5 euros si on obtient deux jetons de même couleur.

1) $p = 0{,}3^2 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2 = 0{,}38$. (On peut s'aider d'un arbre.)

2) Un joueur décide de jouer 10 fois à ce jeu, on note X le nombre de victoires.

a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}38$.

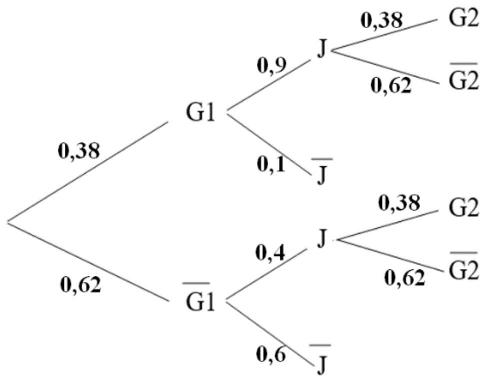
b) Avec la calculatrice on trouve $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}4336$

Le joueur a donc 43,36 % de chance de gagner au moins sa mise, il a surtout plus de risque de perdre de l'argent à ce jeu...
On peut retrouver cette conclusion en calculant l'espérance d'une partie :
$0{,}38 \times (+3) + (1-0{,}38) \times (-2) = -0{,}2 < 0$

Partie B :

On a observé que si un joueur gagne, la probabilité qu'il joue une fois suivante est de 0,9. Dans le cas contraire, si un joueur perd, la probabilité qu'il joue une fois suivante est seulement de 0,4.
On note les évènements :

G1 : Le joueur gagne à la première partie.
G2 : Le joueur gagne à la deuxième partie.
J : Le joueur rejoue une fois suivante.



$P(G2) = P(G1 \cap G2) + P(\overline{G1} \cap G2)$
$= 0{,}38 \times 0{,}9 \times 0{,}38 + 0{,}62 \times 0{,}4 \times 0{,}38 = 0{,}2242.$

$$P_{G2}(G1) = \frac{P(G1 \cap G2)}{P(G2)} = \frac{0{,}38 \times 0{,}9 \times 0{,}38}{0{,}2242} \approx 0{,}5797$$

Barème

Ex 1 : **4 points**

1) 1,5 pts
2) 1,5 pts
3) 1 pt si résultat ok. (0,5 pt si formule ok)

Ex 2 : **7 points**

Partie A

1) 0,5 pt
2) 1pt
3) a) 1,5 pt (continuité 0,5 ; strictement croissante 0,5 , TVI 0,5)
   b) 0,5

Partie B

1) 1 pt
2) et 3) 2,5 pts

Ex 3 : **3 points**

1) 1,5 pts
2) a) 1 pt.
   b) 0,5 pt

Ex 4 : **6 points**

Partie A

1) 1 pt
2) a) 0,5 pt (sans justifier mais avec paramètres)
   b) 1 pt

Partie B

1) 1 pt
2) 1 pt
3) 1,5 pts