Fonctions exponentielles et logarithme décimal

I. Fonction exponentielle

1.1) Définition

On appelle fonction **exponentielle de base q** toute fonction de la forme :

$$x \mapsto q^x \qquad \text{avec } q \in]\,0\,;+\infty\,[$$

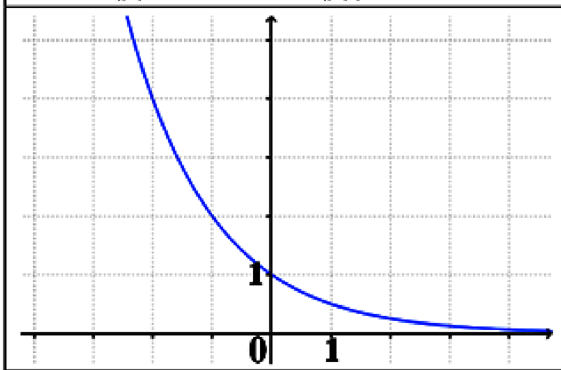
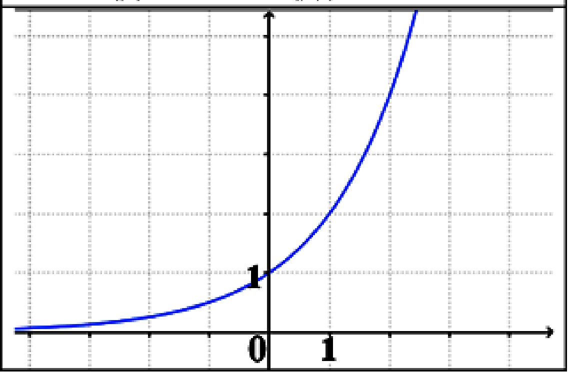
1.2) Propriétés (admises) :

a) Toute fonction exponentielle de base q est définie sur R
b) Toute fonction exponentielle est positive.
c) Les propriétés des puissances s'appliquent :

$$q^0 = 1 \qquad\qquad q^{-x} = \frac{1}{q^x} \qquad\qquad q^{x+y} = q^x \times q^y$$

On dit qu'une fonction exponentielle transforme une somme en produit.

1.3) Variations et Représentations graphiques :

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$
	

Ici $q =$ Ici $q =$

Remarque : La représentation graphique d'une fonction exponentielle passe toujours par le point de coordonnées (0 ; 1)

Problème/ Suite à une infection, le nombre de bactéries contenue dans un organisme est donné par la fonction $f(t) = 100\,000 \times 1{,}1^t$, où t est exprimé en heures, avec $t \in [0 ; 3]$.

1) Vérifier par un calcul que le nombre de bactéries après 1 heure et 30 minutes est supérieur à 115 000.

2) Combien dénombre-t-on de bactéries après 2 heures et 45 minutes ?

3) A partir de quelle durée le nombre de bactéries a-t-il augmenté de plus de 25% ?

II. Fonction logarithme décimal.

2.1)Définition :

Il s'agit de la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10.

Cette fonction est définie sur] 0 ; +∞ [:

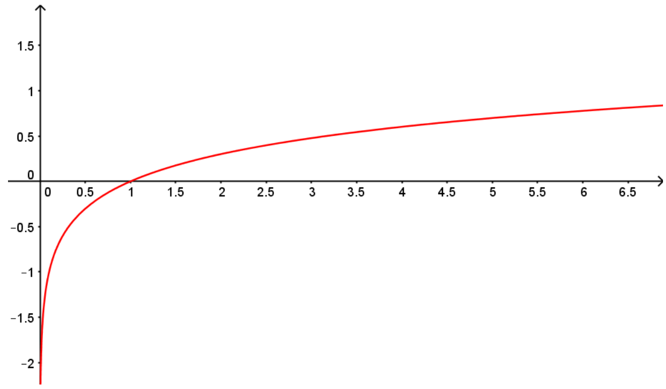
Pour tout nombre réel x strictement positif, pour tout nombre réel a ,

$$x = 10^a \quad \Leftrightarrow \quad \log x = a$$

Conséquence : **$\log(10^a) = a$**

2.2)Sens de variation et représentation graphique :

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [



2.3)Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.Soit n un nombre réel.

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ $\qquad\qquad$ $\log(a^n) = n\log(a)$

$$\log(a) = \log(b) \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

2.4)Applications :

- Résoudre une équation du type $a^x = b$
- *Résoudre une inéquation du type* $a^x > b$
- Une quantité augmente tous les jours de 5% C*ombien de jours seront nécessaires pour doubler la quantité ?*

Pb Bac : Bien qu'il soit fortement déconseillé de fumer pendant l'allaitement, certaines femmes continuent de le faire. Il convient alors de respecter des mesures de précaution pour minimiser l'exposition de l'enfant à la nicotine. On s'est intéressé à la concentration de nicotine dans le sang d'une patiente au cours du temps après qu'elle a fumé une cigarette. Elle ne fumera plus pendant toute la durée du test. On note $f(t)$ la concentration de nicotine dans le sang de la patiente en nanogramme par millilitre (ng/ml) à l'instant t (en heures).
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où la concentration est maximale

(pic sanguin atteint très rapidement). On admet que $f(t) = 25\times0{,}7^t$, pour $t \in [0 ; 10]$.

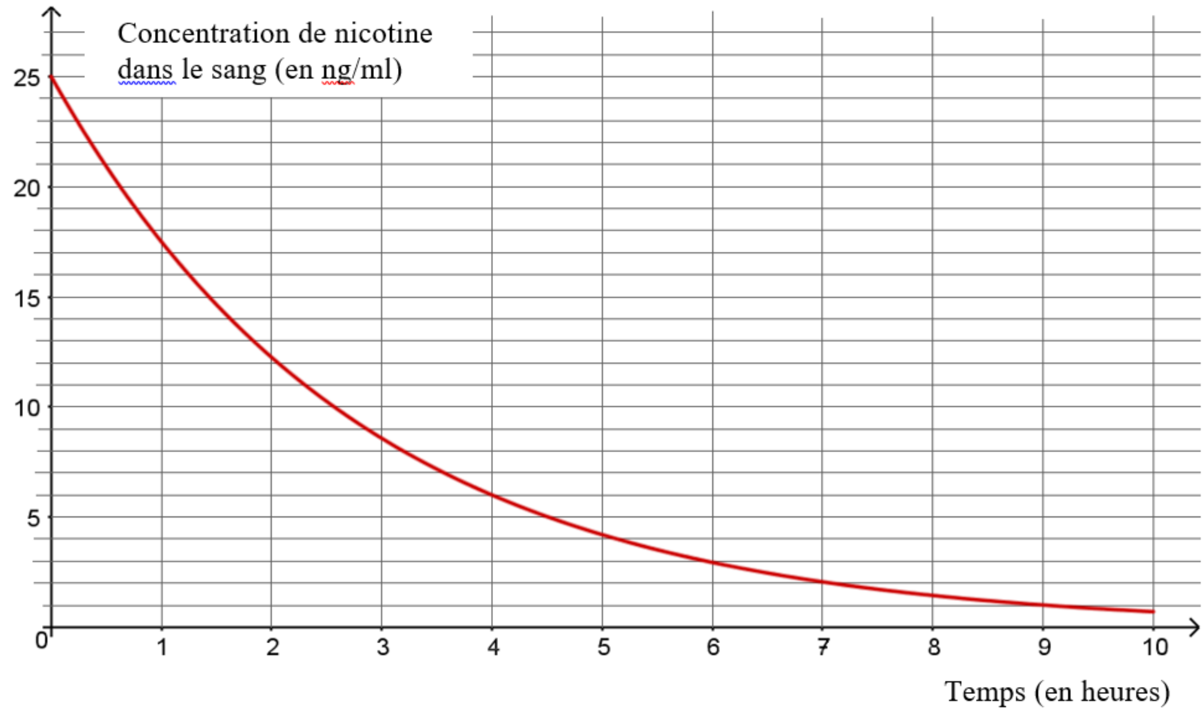
1. On admet que sur l'intervalle [0 ; 10] la fonction f a le même sens de variation que la fonction g définie par $g(t) = 0{,}7^t$. Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

2. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

3. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan est donnée en annexe 1 :

a. Déterminer graphiquement la concentration de nicotine dans le sang de la patiente au bout d'une heure et demie. On laissera les traits de construction.
b. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration de nicotine dans le sang a quasiment disparu, c'est-à-dire quand elle devient inférieure ou égale à 1ng/ml.

4. ***a.*** Par calcul, résoudre, dans l'intervalle [0 ; 10] l'inéquation : $f(t) \leq 12{,}5$.
b. On conseille aux femmes qui fument d'attendre que la moitié de la nicotine présente dans leur sang ait été éliminée avant d'allaiter leur enfant. Combien de temps, à l'heure près, la patiente devra attendre avant de pouvoir allaiter son enfant ? Expliquer la démarche.



Au début d'un effort physique, la consommation de glucose étant supérieure à l'apport d'oxygène, l'organisme produit du lactate (aussi appelé acide lactique) responsable, entre autres, de crampes musculaires.

Dans l'**annexe** sont représentées les évolutions de la lactatémie, c'est-à-dire la concentration en lactate, en millimoles par litre (mmol.L^{-1}), en fonction de la vitesse de course, exprimée en kilomètres par heure (km.h^{-1}), pour deux individus.

Le premier individu, P_1, peu entraîné, voit sa lactatémie augmenter rapidement tandis que celle du second individu, P_2, coureur de demi-fond, augmente moins rapidement.
La tangente à la courbe de lactatémie de P_2 au point A de coordonnées (9 ; 4) est représentée en pointillés. Cette droite passe par le point B de coordonnées (22 ; 8).

Partie A

Dans cette partie, **on s'intéresse à la courbe représentant la lactatémie du coureur P_2**.
On suppose que cette lactatémie est modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20].

1. En s'aidant du graphique de l'**annexe**, et en faisant apparaître les traits de construction utiles, déterminer avec la précision que permet la lecture graphique :

- **a.** la vitesse à partir de laquelle la lactatémie dépasse 8 millimoles par litre ;
- **b.** la lactatémie du coureur P_2, s'il court à une vitesse de 9 kilomètres par heure.

2. Déterminer, par un calcul, $f'(9)$, le nombre dérivé de la fonction f en 9.

3. On admet que la fonction f est définie par :

$$f(x) = 2 \times 1,08^x$$

pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20].

- **a.** Déterminer une inéquation qui permet de répondre, par le calcul, à la question **1 a.**
- **b.** Résoudre cette inéquation dans l'intervalle [0 ; 20].

Bien qu'il soit fortement déconseillé de fumer pendant l'allaitement, certaines femmes continuent de le faire. Il convient alors de respecter des mesures de précaution pour minimiser l'exposition de l'enfant à la nicotine.
On s'est intéressé à la concentration de nicotine dans le sang d'une patiente au cours du temps après qu'elle a fumé une cigarette. Elle ne fumera plus pendant toute la durée du test.
On note $f(t)$ la concentration de nicotine dans le sang de la patiente en nanogramme par millilitre(ng/ml) à l'instant t (en heures). L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où la concentration est maximale (pic sanguin atteint très rapidement).
On admet que

$$f(t) = 25 \times 0,7^t, \quad \text{pour } t \in [0\,;\,10].$$

1. On admet que sur l'intervalle [0 ; 10] la fonction f a le même sens de variation que la fonction g définie par $g(t) = 0,7^t$.
Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

2. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

3. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan est donnée **en annexe** :

- **a.** Déterminer graphiquement la concentration de nicotine dans le sang de la patiente au bout d'une heure et demie. On laissera les traits de construction.
- **b.** Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration de nicotine dans le sang a quasiment disparu, c'est-à-dire quand elle devient inférieure ou égale à 1 ng/ml.

4. **a.** Résoudre dans l'intervalle [0 ; 10] l'inéquation : $f(t) \leqslant 12,5$.

- **b.** On conseille aux femmes qui fument d'attendre que la moitié de la nicotine présente dans leur sang ait été éliminée avant d'allaiter leur enfant. Combien de temps, à l'heure près, la patiente devra attendre avant de pouvoir allaiter son enfant ? Expliquer la démarche.