Exercices d'oral 2015

L'oral de second groupe consiste en une préparation de 20 minutes, puis une présentation orale de 20 minutes du travail effectué.
Chaque sujet d'oral comporte deux exercices, portant sur deux thèmes essentiels au moins du programme de l'année.
Est retenue la meilleure note entre l'épreuve écrite du 1er groupe et l'épreuve orale.

Pour constituer un sujet d'oral de révision, il suffit de prendre deux des exercices ci-dessous, portant sur des thèmes différents — comme étude de fonction et probabilités, nombres complexes et intégration…

Exercice 1
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-contre.
2. F est une primitive de f, définie sur $\mathbb{R}$.
   Sans calcul, à l'aide du tableau de la question 1, dresser le tableau de variations de F.

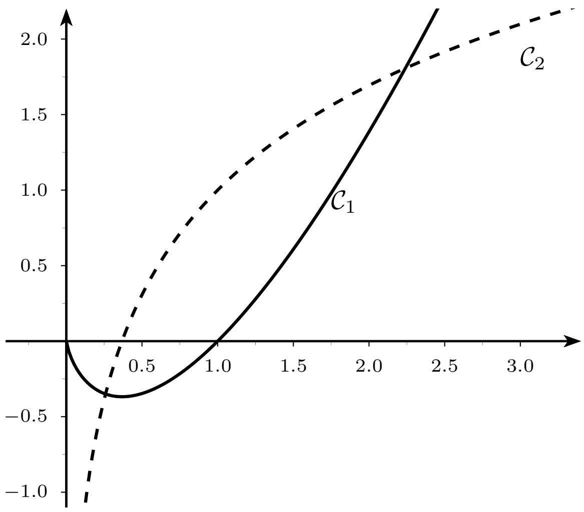
Exercice 2
La fonction f est définie par :

$$f(x) = \ln x + 1$$

1. Justifier le tableau de signes de la fonction f ci-dessous.

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. F est une primitive de f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Le graphique ci-contre présente deux courbes de fonctions : $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   Sans calcul, à l'aide du tableau de la question 1, préciser quelle est la courbe de F.



Exercice 3

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne :

- le point A$(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$;
- le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$;
- la droite d admettant pour système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = & t \\ y = & -2t+1 \\ z = & t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$;
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x - 2y + z + 1 = 0$.

En justifiant le raisonnement, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

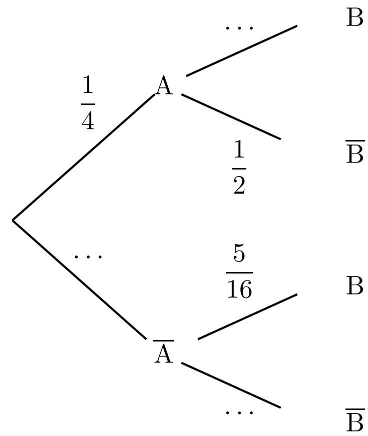
1. $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite d.
2. A est un point de la droite d.
3. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par le point A.
4. La droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 4

1. Rappeler les conditions pour qu'une fonction f, définie sur un intervalle $[a; b]$, soit la fonction densité d'une variable aléatoire.
2. Pour chacune des fonctions proposées ci-dessous :
   a) calculer son intégrale sur l'intervalle donné ;
   b) préciser s'il s'agit d'une fonction densité d'une variable aléatoire sur cet intervalle.

$f_1(x) = 3$ sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ $\qquad$ $f_2(x) = 1 - x$ sur $[0\ ;\ 2]$ $\qquad$ $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$

Exercice 5



Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. La variable aléatoire Y est définie sur $[0\ ;\ 4]$ et admet pour fonction densité : $f(x) = \dfrac{1}{8}x$ sur cet intervalle.
   Justifier que $p(\mathrm{Y} \in [2\ ;\ 3]) = \dfrac{5}{16}$.
2. Une expérience aléatoire comprend les événements A et B.
   Elle est décrite par l'arbre pondéré ci-contre.
   Compléter l'arbre, puis calculer $p(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

Exercice 6

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f	$2 \searrow 0$

1. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-contre.
2. La fonction F est définie pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$ par :

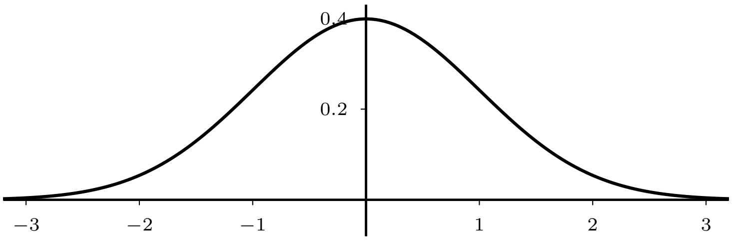
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

   Prouver que F admet 1 pour limite quand x tend vers $+\infty$.
3. La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.
   Justifier que $p(\mathrm{X} \leqslant a) = 0,5$ pour $a = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice 7

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type 3.5.
Le tableau ci-dessous donne, en fonction de a, la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à a.

a	40	42.5	45	47.5	50	52.5	55	57.5	60
$p(\mathrm{X} \leqslant a)$	0,0021	0,0161	0,0766	0,2375	0,5	0,7625	0,9234	0,9839	0,9979



1. Déterminer $p(\mathrm{X} > 45)$, puis $p(\mathrm{X} \in [45; 55])$.
2. Soit Z la variable définie par : $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - 50}{3,5}$.
   La fonction densité associée à Z est dessinée ci-contre.
   Traduire $p(\mathrm{X} \in [45; 55])$ sur le schéma.

Exercice 8

1. Qu'affiche l'algorithme ci-contre quand la valeur entrée pour n est 3 ?
2. *Question à choix multiples*
   La suite (u_n) dont les termes sont calculés par l'algorithme est définie pour tout entier n par :
   a) $u_n = \frac{1}{2}n + 3$ ou b) $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ u_{n+1} = & \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$
3. La suite (w_n) est définie pour tout n par : $w_n = u_n - 6$.
   On admet que (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   a) Exprimer w_n en fonction de n, et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Variables
u, n, i sont des nombres.
Début algorithme
L'utilisateur entre une valeur pour n.
u prend la valeur 2.
Afficher u.
Pour i allant de 1 à n :
Début pour
  u prend la valeur $\frac{1}{2}u + 3$
  Afficher u.
Fin pour.
Fin algorithme

Exercice 9

1. Qu'affiche l'algorithme ci-contre quand la valeur entrée pour A est 7 ?
2. *Question à choix multiples*
   La suite (u_n) dont les termes sont calculés par l'algorithme est définie pour tout entier n par :
   a) $u_n = \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$ b) $\begin{cases} u_0 = & A \\ u_{n+1} = & \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = & 3 \\ u_{n+1} = & \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$
3. Soit la suite (w_n) définie pour tout n par : $w_n = u_n - 1$.
   On admet que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.
   a) Exprimer w_n en fonction de n, et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   b) Dans l'algorithme, l'utilisateur entre la valeur 10 000 pour A. L'algorithme se termine-t-il ?

Variables
u, n, A sont des nombres.
Début algorithme
L'utilisateur entre un nombre $A > 0$.
u prend la valeur 3.
n prend la valeur 0.
Tant que $u < A$:
Début tant que
  u prend la valeur $\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}$
  n prend la valeur $n + 1$
  Afficher n et u
Fin tant que
Fin algorithme

Exercice 10

Soit l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - z + 1 = 0$.
Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, en justifiant le raisonnement.

1. L'équation (E) n'a pas de solutions réelles.
2. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de (E).
3. Les solutions de (E) ont pour module 2.
4. Une solution de (E) a pour argument : $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 11

Dans le plan complexe, les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$z_A = -3i \qquad z_B = i \qquad z_C = -2 - i$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix fait.
1. Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre K et de rayon 2, avec $z_K = -i$.
2. La longueur AC vaut $2\sqrt{2}$.
3. $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ admet $\frac{5\pi}{2}$ pour argument.
4. Le triangle ABC est isocèle non rectangle.

Exercice 12 *(Spécialité)*

Le digicode d'une porte d'entrée est constitué de 5 chiffres que l'on écrira $abcde$:
- $abcd$ est l'identifiant de l'habitant de l'immeuble ;
- e est une clé de contrôle pour éviter les erreurs de frappe.

Règle : un code $abcde$ doit respecter :

$$a + 7b + c + 7d + e \equiv 0[10]$$

1. Justifier que le code 14577 est correct.
2. Déterminer la clé de l'identifiant 4210.
3. Un habitant entre le code 42104 et la porte ne s'ouvre pas.
   a) Compléter la table ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7x$ [10]										

   b) L'habitant se souvient que le deuxième chiffre (2) du code qu'il a entré (42104) est faux.
   Peut-il retrouver le bon code ?