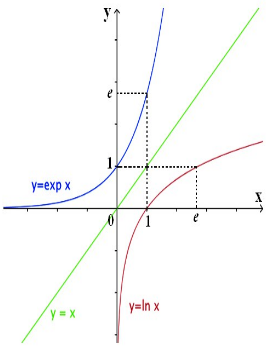
Logarithme népérien

I)Découverte :



La courbe représentant la fonction ln x est symétrique à la fonction exponentielle par rapport …….

Si $y = \mathrm{e}^{x}$ alors ………

ln 1 = ………….   ln e = ………   ln 1/e = ……

Sachant que $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$ que peut-on dire de lnxy ?

II) Fonction logarithme népérien :

2.1) Définition : La fonction logarithme népérien notée ln est la fonction définie sur]0;+∞) qui a tout nombre x positif associe l'unique solution de l'équation :

$x = \mathrm{e}^{y}$ d'inconnue y On la note $y = \ln x$

2.2) Conséquences : A Connaitre Indispensable ……

$$e^{\ln x} = x \qquad\qquad \ln(e^{x}) = x$$

1. $\ln(1) = \dots$	2. $\ln(\mathrm{e}) = \dots$	3. $\ln(\mathrm{e}^{2}) = \dots$	4. $\ln(\mathrm{e}^{-3}) = \dots$	5. $\ln(\dots) = 5$
6. $\mathrm{e}^{\ln(3)} = \dots$	7. $\mathrm{e}^{-\ln(2)} = \dots$	8. $\mathrm{e}^{\dots} = 9$	9. $\mathrm{e}^{\dots} = \frac{3}{2}$	10. $\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{7}\right)} = \dots$

2.3) Résolution d'équations :

$\ln x = 2$	$e^{x+1} = 5$	$3\ln(x-4) = 8$
$e^{\ln x} = e^{2}$	$\ln(e^{x+1}) = \ln 5$	$\ln(x-4) = \frac{8}{3}$
$x = e^{2}$	$x + 1 = \ln 5$	$e^{\ln(x-4)} = e^{\frac{8}{3}}$
	$x = \ln 5 - 1$	$x - 4 = e^{\frac{8}{3}}$
		$x = e^{\frac{8}{3}} + 4$

Résoudre les 3 équations suivantes :

$\mathrm{e}^{4x-1} = -1$ $\mathrm{e}^{2x-5} = 2$ *ln(3x-1) = -1*

III) Etude de la fonction ln :

3.1)Etude : Pour tout nombre réel x > 0 ,

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Conséquence : ln'(x) > 0 sur] 0 ; + ∞ [

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Faire le tableau de variation de la fonction : Avec les élèves

Puis retracer la fonction avec commentaires …... asymptotes ?

Exercice : Recherche des domaines de définition des 2 fonctions suivantes :

$$f(x)=\ln(3x-5) \qquad\qquad g(x)=\ln(x^2+2)$$

3.2) Résolution d'inéquations :

Soit $(a,\, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
En particulier : $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$; $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

$\ln(x^2+1) < \ln 5$ $\qquad$ $\ln x > 0,75$ $\qquad$ $e^{x+5} \leq 3$

$$\ln(3x) \leqslant \ln(x-2) \qquad\qquad \ln(2x) \geqslant \ln(x^2-4x+3)$$

3.3) Propriétés algébriques de la fonction ln:

Pour tout réel $a > 0$ et $b > 0$ on a :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec n un entier relatif.
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

Exercice : Réduire les expressions suivantes :

ln63 -ln7 = 　　　　ln35 – ln 21 +ln15= 　　　　4ln6 -ln16 = 　　　　- ln 4² +5 ln 2 =

Exercice : Résoudre les équations

$x^5=10^6$ 　　　　$x^3=15$ 　　　　$\ln(3x+5)=2$

$\ln(2x)=\ln(1+x^2)$ 　　　　$\ln(\frac{x}{3})=-2\ln(x+3)$

3.4)Autres limites :

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ **(1)** ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ **(2)** ; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

A démontrer avec les élèves ....

Puis trouver les limites en + l'infini des fonctions

$f(x)=\ln(e^x+1)-2x$ 　　　　$g(x)=x\ln(x)-x^2$

Puis la limite en 0 de la fonction $h(x)=\frac{\ln(2x+1)}{3x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(1+e^{-2x})$. **2.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(1+e^{-2x})$.

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{1+2e^{2x}}$ 　　　　**4.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{1+2e^{2x}}$

IV) Fonction composée :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$.

Ex1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes (penser aussi au domaine de définition)

$f(x)=\ln(2x+1)$ 　　　　$g(x)=\ln(3-x^2)$

Ex 2 : Etudier les 2 fonctions précédentes (tableau de variation, asymptotes, tangentes, ...)

Puis étudier la fonction $h(x)=x\ln(x)$

V) Logarithme décimal :

La fonction logarithme décimal est notée log et est définie sur]0 ; + ∞]

On a $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Etudions la dérivée de cette fonction : ....

Tableau de variation :

La fonction log possède les mèmes propriétés que la fonction ln.

Pour tout *x* de R on a : $\log(10^x)=x$

Divers exercices : Utilisation en PHYSIQUE ?
Recherche d'exemples …..