# Complexes fin :

1) Exercices :

ex1 : Ecrire les nombres complexes $Z1$ et $Z2$ sous forme algébrique :
*(Détailler les étapes des calculs)*

Z1= ( 5+6i)(9-i) et Z2 = (1-i) : (1+i)

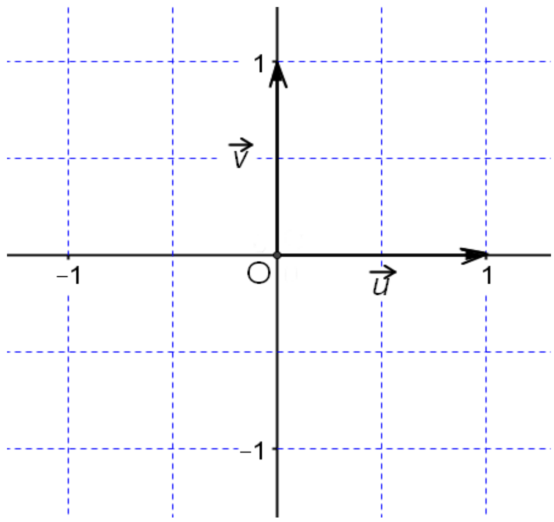
ex2 : On considère le nombre complexe $j$ défini par

**1)** Calculer $j^2$ et préciser son module et son argument.

**2)** Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé

**a)** Démontrer que les points A d'affixe 1, B d'affixe $j$ et C d'affixe $j^2$ sont situés sur un même cercle de centre O.

**b)** Placer les points A, B et C sur la figure ci-contre:




**c)** Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

**3)** Démontrer les égalités suivantes :

**a)** $1 + j + j^2 = 0$ **b)** $j^3 = 1$

**4)** Déterminer la forme algébrique de $(1 + j)^{2025}$

ex3 **: Résoudre dans C:**

**1)** $2z^2 + z + 1 = 0$ **2)** $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

ex 4 :Soit $(z_n)$ la suite à valeurs complexes définie par : $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = f(Z_n)$

avec $f(z) = \dfrac{z}{1+z(2+i)}$

1. Calculer $z_1$ et $z_2$ puis $\dfrac{1}{z2} - \dfrac{1}{z1}$ . Donner le résultat sous forme algébrique.
2. On pose $u_n = 1/Z_n$ pour tout n entier.

   a) Calculer $u_{n+1} - u_n$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

   b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n puis de $z_n$ en fonction de n.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point $M$ est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point $M'$ associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont réels, tels que le point $M'$ associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe $z$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par $a$ le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer $a^2$ sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de $z$ est le nombre complexe $z$ défini par $z = x - iy$.
   Démontrer que :
   — Pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
   — Pour tout nombre complexe $z$ et tout entier naturel non nul $n$, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.
4. Démontrer que si $z$ est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = \dfrac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$.

On définit la fonction $f$ par $f(M) = M'$.

1. On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
   Déterminer les affixes des points $A'$, $B'$ et $C'$ images respectives de $A$, $B$ et $C$ par $f$. Placer les points $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ et $C'$.
2. On pose $z = x + iy$, avec $x$ et $y$ réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z$ en fonction de $x$ et $y$.
3. Montrer que l'ensemble des points $M$ invariants par $f$ est la droite $D$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
   Tracer $D$. Que remarque-t-on ?
   *(Indication: un point invariant par $f$, ou point fixe, est un point $M$ tel que $f(M) = M$).*
4. Soit $M$ un point quelconque du plan et $M'$ son image par $f$.
   Montrer que $M'$ appartient à la droite $D$.

II) Forme exponentielle d'un complexe :

2.1) Forme trigonométrique :

Rappel vocabulaire et formules sur modules , arguments, opérations

Puis exemple : Soit Z1= -1+i (A) Z2= -1-i (B) Z3= 2i (C) Z4= 2-2i (D)

Chercher les modules et arguments de ces complexes

Puis donner la nature du triangle ACD à l'aide du quotient $\frac{c-a}{d-a}$

2.2) Définitions :

Pour tout réel $\theta$ , on a $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

Tout complexe z de module r et d'argument $\theta$ peut s'écrire : $z=re^{i\theta}$

Exemples :

2.3) Propriétés et formules :

**En utilisant les propriétés des exponentielles : retrouver les formules pour le produit, l'inverse et le quotient avec les élèves …..**

Formule de Moivre :

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Formule d'Euler :

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Formules à démontrer avec les élèves …..

Remarque : on peut retrouver 6 formules sur les fonctions circulaires :

cos(a+b) = cos2$x$ = cos(a-b) = sin2$x$ = sin(a+b) sin(a-b) =

2.3) Exercices :

ex1 : Déterminer les formes algébriques des complexes suivant :

$e^{i\Pi}$ $\quad -2e^{-i\Pi}$ $\quad 3e^{\frac{i\Pi}{3}}$

ex2 : Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants :

-2 3i 1-i $1-i\sqrt{3}$