Continuité,Convexité et inflexion

I. Continuité

1) Tracés :

Nous allons tracer 4 courbes sur l'intervalle [-4;4]

$f(x)=\frac{x^2}{2}$

Puis g telle que g(x) = -x si $x \leqslant 1$
et g(x) = 2x -3 si x >1

Puis h telle que h(x) = x si x <- 2
et $h(x)=\frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant -2$

Et pour finir :E(x) la fonction entière
E(x) est égal au plus grand entier inférieur ou égal à x

Tracés des 4 courbes sur un même repère
Que constate t-on ?

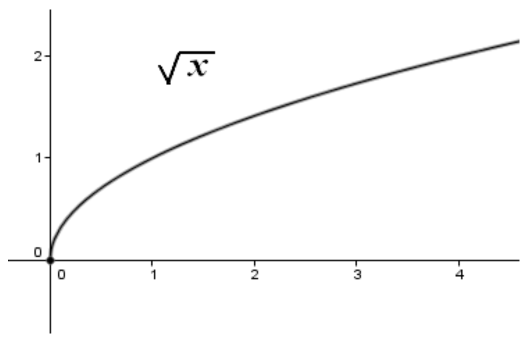
2) Fonction continue : Notion simplifiée, intuitive...

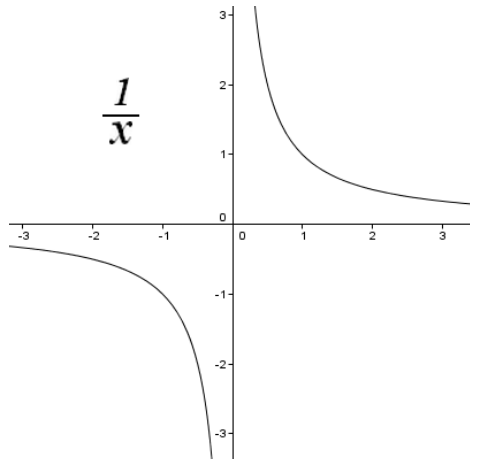
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I *"sans lever le crayon"*.

Exemples : Revoir les 4 cas précédents

La fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

La fonction h définie sur R* par $h(x)=\frac{1}{x}$ n'est pas continue en zéro.



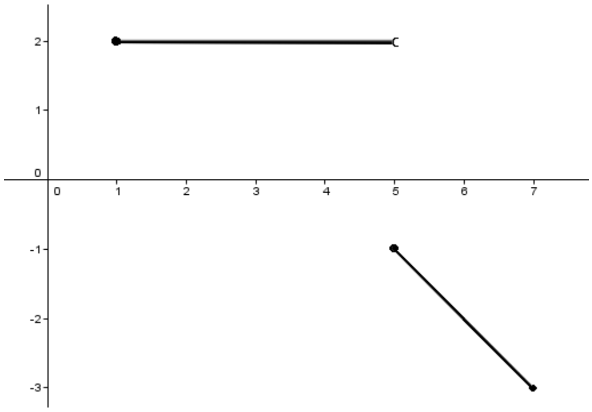


Remarques: **Une fonction peut être définie en tout point d'un intervalle sans être continue sur cet intervalle.**

Toute fonction dérivable est continue
(la réciproque n'est pas toujours vérifiée)

Exemple :

La fonction m définie sur $[1\ ;\ 5[$ par $m(x)=2$
sur $[5\ ;\ 7]$ par $m(x)=-x+4$



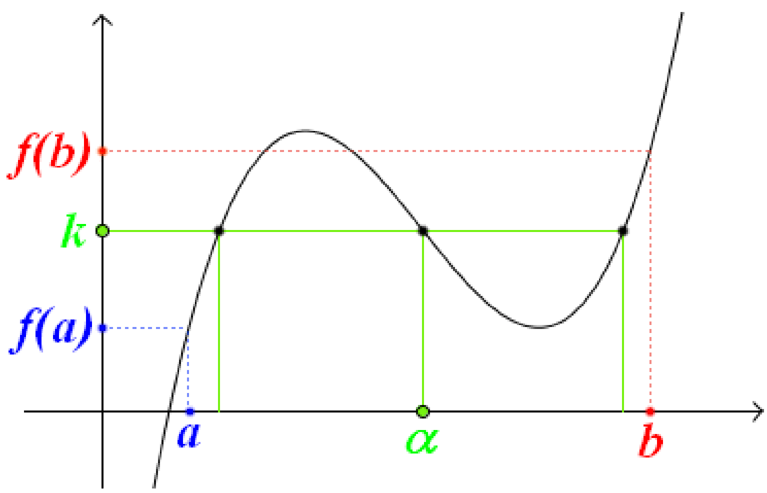
Autres exemples à faire avec élèves.........

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle [a ; b]

Pour tout nombre réel $k \in [f(a)\ ;\ f(b)]$,

il existe **au moins** un nombre $\alpha \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(\alpha)=k$

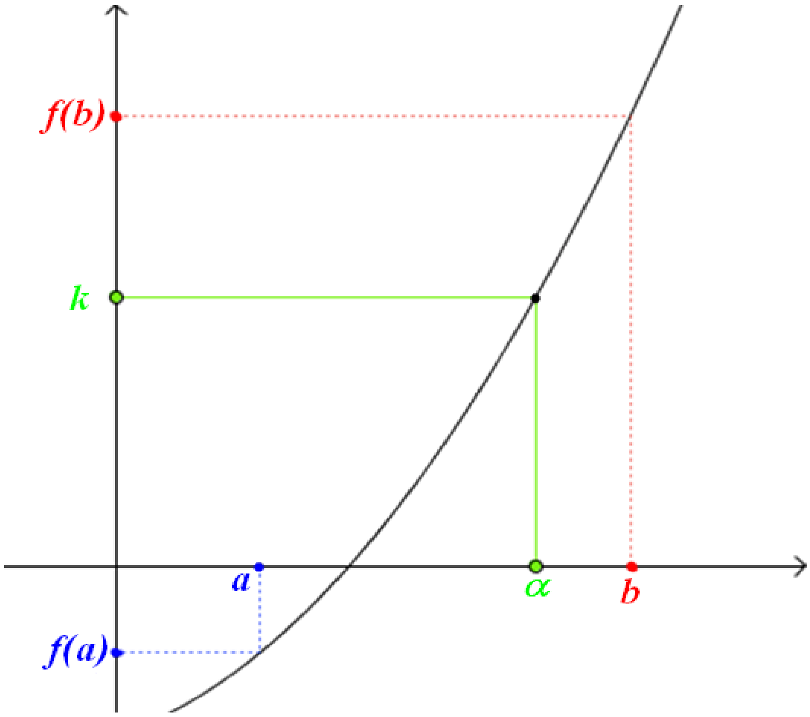


Cas particulier :

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle [a ; b]

Pour tout nombre réel $k \in [f(a) ; f(b)]$,

il existe un nombre **unique** $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$



$f(\alpha) = k$

Exemple :

Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	-3		1		3		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	-1

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 3].
On a f(1) = 3 et f(3) = -2

$0 \in [-2 ; 3]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre unique $\alpha \in [1 ; 3]$ tel que f(α) = 0

III) Application du TVI

1) Résolution d'équations :

Ex1 : Soit l'équation $x^3 + x = 5$

Montrons que cette équation a une solution comprise entre 1 et 2

Pour cela posons la fonction f(x) = $x^3 + x$ *et étudions sa monotonie sur [1;2]*

Travail avec les élèves ......

Ex 2 :

x	-3		-1		2		6
f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Donner sans justification le nombre de solutions sur l'intervalle [-3;6] des équations suivantes :

f(x) = 2   f(x) = 4   f(x) = 4,8   f(x) = -3

Ex 3 :

x	-4		-2		3		7
f	‖ 1	$\nearrow$	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	5

Donner sans justification le nombre de solutions sur l'intervalle [-4;7] des équations suivantes :

f(x) = 2   f(x) = 4   f(x) = 0   f(x) = 6,8

Ex 4 : Soit f(x) = x^2 -3x +1 définie sur [0;5]

Calculer sa dérivée, puis son signe

En que l'équation f(x) = 8 possède une unique solution sur [0;5]

Donner un encadrement de cette solution au centième près

Ex 5 : Soit g(x) = 2 x^3 +3x^2 -12x définie sur [-4;3]

Calculer sa dérivée, puis son signe

En que l'équation g(x) = -8 possède une unique solution sur [-4;3]

Donner un encadrement de cette solution au centième près

2) Etude du signe d'une fonction :

Soit f(x) = x^3 +4x^2 +6x - 1 définie sur [0;100]

Calculer f(0) ; f(0,5) et f(1)

Déterminer le sens de variation sur [0;100]

Prouver qu'il existe un unique nombre α compris entre 0 et 1 tel que f(α) =0

Encadrer ce nombre au centième prés

Déterminer le signe de f(x) sur [0;100]

IV)Convexité

4.1) Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, représentée par la courbe $\mathcal{C}$.

- la fonction est dite **convexe** sur I lorsque sa courbe $\mathcal{C}$ est située entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.

- la fonction est dite **concave** sur I lorsque sa courbe $\mathcal{C}$ est située entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

4.2 Théorème:

- Une fonction ***f*** **est convexe** sur un intervalle I
  si et seulement si sa dérivée ***f '*** **est croissante** sur I.

- Une fonction ***f*** **est concave** sur un intervalle I
  si et seulement si sa dérivée ***f '*** **est décroissante** sur I.

Exemple *Soit la fonction f définie sur I = [-5;5] par* $f(x)=-2x^3+15x^2-24x-7$.
Etudier la convexité de la fonction f sur I.

Remarque : à faire avec élève sur signe de f''(x)

V) Point d'inflexion :

Un **point d'inflexion** est un point où **la représentation graphique** d'une fonction **traverse sa tangente** en ce point.

Pour le trouver : La courbe d'une fonction admet un point d'inflexion là où sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Exemple : A chercher avec les élèves …...

Exercice : :f est la fonction définie sur [-4 ; 4] par $f(x) = x^3 - 27x + 4$.

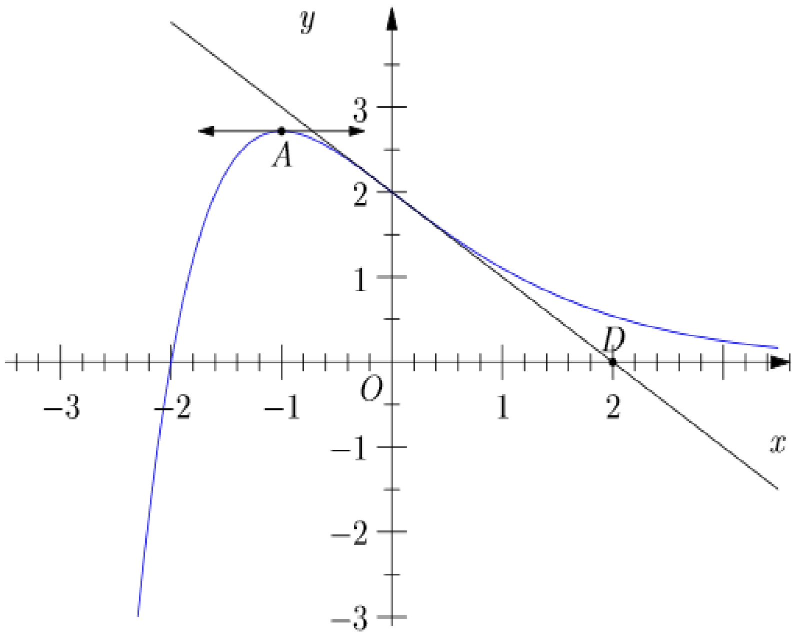
a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Démontrer que l'équation f(x) = 0 a une unique solution α dans l'intervalle [-4 ; 4].Puis donner l'arrondi de α au centième. Et en déduire le signe de f sur son domaine de définition

c) Etudier la convexité de cette fonction, puis trouver en justifiant un point d'inflexion

Partie A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points $A(-1; e)$ et $B(0; 2)$ où $e = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2; 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2; 3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; 3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$,
5. $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1; 3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1; 3]$.